

Stima & Identificazione

Compito del 27 Giugno 2014, ore 8:30, Aula 111, Edificio di Santa Marta

Problema 1 - Si consideri il sistema a tempo-discreto

$$\begin{cases} s_t &= -s_{t-2} + w_{t-1} \\ y_t &= s_t + v_t \\ w_t &= wn(0, 1) \\ v_t &\sim wn(0, r), r > 0, \end{cases}$$

con w_t e v_t incorrelati.

- a) Si dica, giustificando la risposta, se il segnale y_t è stazionario o meno.
- b) Determinare la varianza del rumore di misura r in modo tale che l'errore di predizione ad un passo di s_t abbia varianza asintotica $E[\tilde{s}_{t+1|t}^2] = \frac{3}{2}$.
- c) Determinare i predittori ottimi (nel senso MMSE) stazionari del segnale y_t a $k = 1, 2, 3$ passi e le relative covarianze dell'errore di predizione $E[\tilde{y}_{t+k|t}^2]$.
- d) Determinare il filtro ottimo del segnale s_t e la relativa covarianza dell'errore di stima $E[\tilde{s}_{t|t}^2]$.

Problema 2 - Dato il segnale y_t generato nel seguente modo:

$$\begin{cases} s_t &= w_t + \frac{15}{14}w_{t-1} \\ r_t &= v_t + 2v_{t-1} \\ y_t &= s_t + r_t \\ w_t &= wn(0, 147) \\ v_t &= wn(0, \sigma_v^2), \end{cases}$$

con w_t e v_t incorrelati,

- a) si dica, giustificando la risposta, se tale segnale è stazionario o meno;
- b) si determini $\sigma_v^2 > 0$ in modo che il fattore spettrale canonico del segnale y_t risulti $C(z) = 1 + \frac{9}{10}z^{-1}$;
- c) si determinino le funzioni di auto-covarianza dei processi y_t, s_t, r_t ;
- e) si determini il predittore MMSE ad un passo del segnale y_t assumendo di osservare entrambi i segnali s_t e r_t ;
- f) si determini il predittore MMSE ad un passo del segnale y_t assumendo di osservare il solo segnale y_t ;
- g) si confrontino gli errori quadratici medi di predizione dei due predittori di cui ai punti e) ed f).

Problema 3 - Un motore in corrente-continua è descritto dal seguente modello matematico a tempo-continuo

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -a\omega + bu - C_0 - \sigma w \\ y &= \theta + v \end{cases}$$

dove: θ è la posizione angolare del motore, ω la velocità angolare, u la tensione di armatura; $C_0 + \sigma w$ è la coppia di carico di media C_0 e varianza $\sigma^2 > 0$ note, con $w = wn(0, 1)$. Impostare il problema di stimare congiuntamente, dalle osservazioni campionate $y_k = y(kT)$, lo stato del sistema (variabili θ e ω) ed i parametri a, b definendo il vettore di stato aumentato $x = [\theta, \omega, a, b]^T$.

Problema 4 - Si dispone di una data-set $y^N \triangleq \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ generato da un processo a media mobile (MA) $y_t = C(z)e_t$ di ordine $n \ll N$. Si discuta come si può procedere alla stima dei coefficienti c_1, \dots, c_n del polinomio $C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}$ a partire dal data-set, utilizzando il correlogramma e la fattorizzazione spettrale.